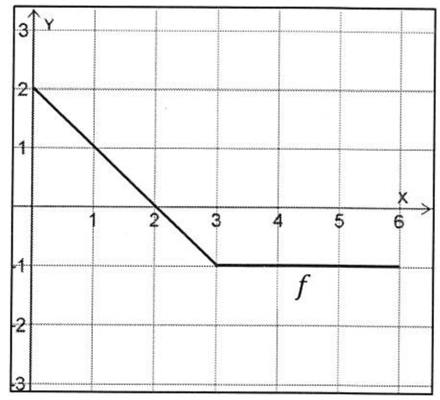
FACIT

"Repetitionsprov" inför provet - integraler

Del 1 – Med miniräknare – Endast svar

1. Figuren till höger visar grafen till en funktion, f, som är definerad i intervallet $0 \leq x \leq 6$

Använd grafen för att svara på frågorna nedan.



a) Bestäm värdet av $\int_0^3 f(x)\,dx$

Svar: 1,5 (1/0/0)

b) Vilket positivt värde på a löser ekvationen nedan?

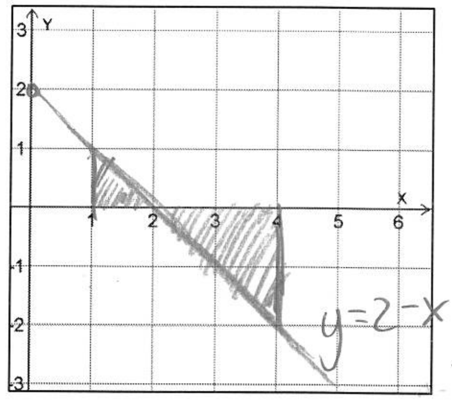
$$\int_0^a f(x)\,dx = 0$$

Svar: a = 4,5 (1/0/0)

2. a) Rita i det tomma koordinatsystemet till höger ut det område som kan beskrivas av integralen

$$\int_1^4 (2 - x)\,dx$$

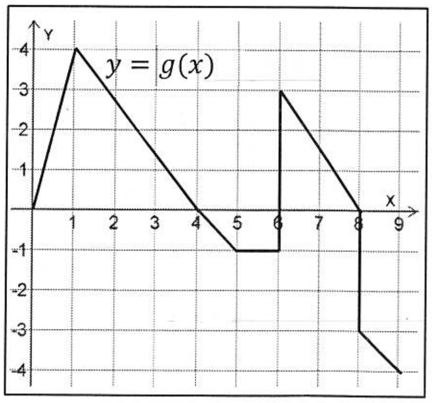
(1/0/0)



b) Bestäm värdet av integralen i a)

Svar: −1,5 (1/0/0)

3. Figuren till höger visar grafen till en funktion, g, som är definerad i intervallet $0 \leq x \leq 9$



Bestäm **största** värdet av integralen

$$\int_0^a g(x)\,dx$$

där $0 \leq a \leq 9$

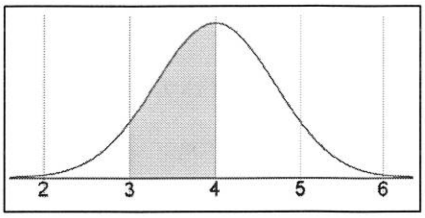
Svar: 9,5 (0/1/0)

Största integralen fås då a = 8

$- + = 8 - 1,5 + 3 = 9,5$

4. Grafen till höger visar en normalfördelningskurva med standardavvikelsen 0,7.

Bestäm arean av det markerade området.

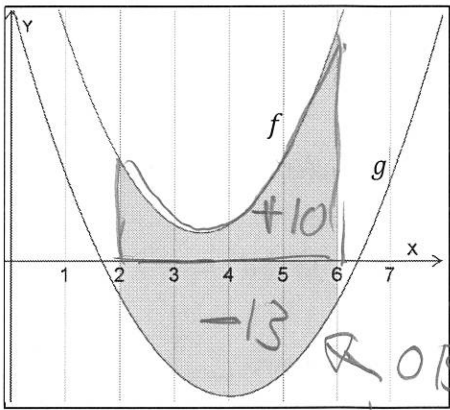


"NÖMS"
3 4 4 0,7

Svar: 0,42 (0/1/0)

5. Figuren till höger visar de två funktionerna f och g och ett område mellan dessa.

Områdets area är 23 ae och $\int_2^6 f(x)\,dx = 10$



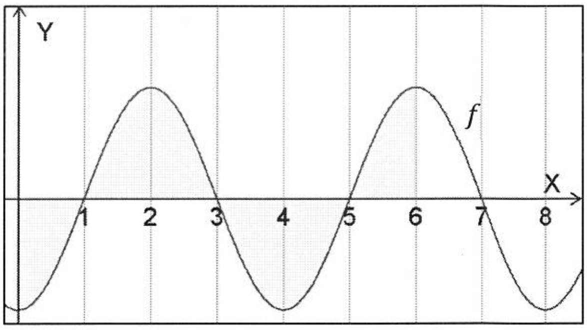
Bestäm värdet av $\int_2^6 f(x)\,dx + \int_2^6 g(x)\,dx$

Svar: −3 (0/1/0)

OBS! Negativ integral.

6. Figuren visar grafen till en trigonometrisk funktion på formen
$f(x) = A\cos(kx)$
och ett markerat område.

Arean av området är 15 ae.



a) Bestäm $\int_0^{21} f(x)\,dx$ *Svara exakt!*

Svar: −2,5 (0/1/0)

b) Bestäm $\int_0^{21} |f(x)|\,dx$ *Svara exakt!*

Svar: 52,5 (0/0/1)

Bara pos. integral bidrag

Period = 4 $\Rightarrow k = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

c) Bestäm värdet av konstanten A. *Svara exakt!*

Svar: 1,25π (0/0/1)

$\int_0^1 A\cos(\frac{\pi}{2}x)\,dx = -2,5$

$A\left[\frac{-\sin(\frac{\pi}{2}x)}{(\frac{\pi}{2})}\right]_0^1 = -2,5 \Rightarrow A = 1,25\pi$

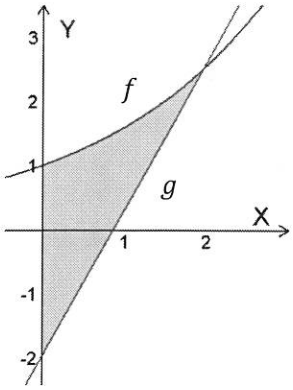
Del 2 – Med miniräknare – Uträkningar krävs

7. Figuren visar ett område som begränsas av funktionerna

$f(x) = 1{,}6^x$ och $g(x) = 2{,}3x - 2$ samt y-axeln

Bestäm arean av området.

Svara med 2 decimalers noggrannhet! (2/0/0)



Skärningspunkt: $x = 1{,}964$

$A = \int_0^{1{,}964} f - g\, dx = [\text{fnInt}] = 2{,}72$ ae

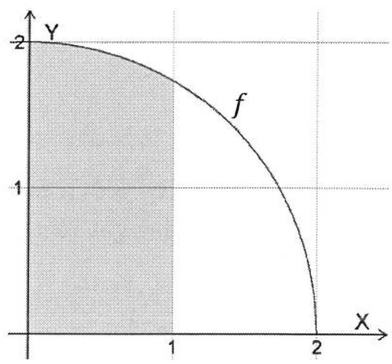
8. Figuren visar ett område som begränsas av funktionerna

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ och $x = 1$ samt y-axeln

Om området roteras kring x-axeln fås en rotationskropp.

Bestäm volymen av denna rotationskropp

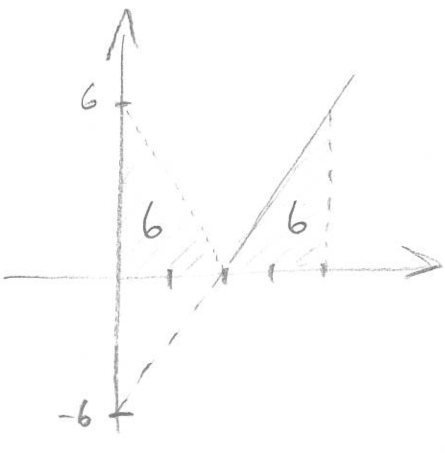
Svara med 2 decimalers noggrannhet! (2/0/0)



Volymen ges av

$\int_0^1 \pi \cdot y^2 dx = [\text{fnInt}] = 11{,}52$ ve

9. Bestäm värdet av $\int_0^4 |3x - 6|\, dx$ (0/2/0)

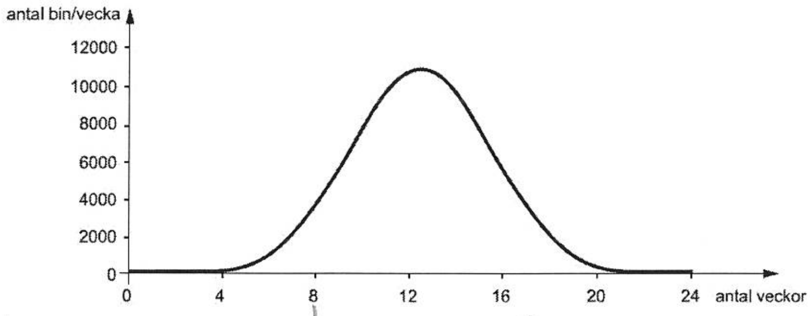


$\int_0^4 |3x-6|\, dx = 6 + 6 = 12$

10. Lös den gamla kursprovsuppgiften nedan: (1/1/0)

10. Den hastighet som antalet bin i ett bisamhälle ökar med per vecka framgår av figuren. Arean under grafen kan beräknas med en integral.

Tolka innebörden av integralens värde.

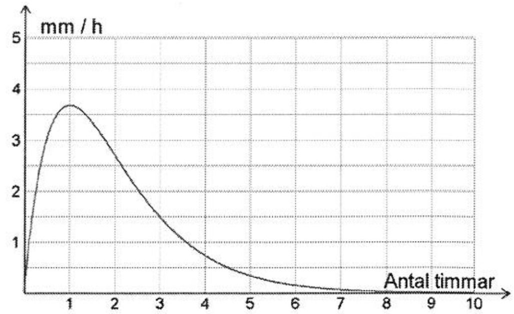


Integralen motsvarar ökningen av antal bin som skett under de 24 veckorna.

11. I den lilla orten BlötTräsk regnar det mycket. En dag gavs intensiteten hos regnet av

$f(x) = 10xe^{-x}$

där x är antalet timmar som gått sedan regnandet började.



a) Hur mycket regn hade kommit efter 7 timmar? (2/0/0)
Svara med 2 decimaler!

Regnet ges av $\int_0^7 10xe^{-x}\,dx = [\text{fnInt}] = 9{,}93$ mm

b) Efter hur många timmar hade det regnat 7 mm? (0/2/0)
Svara med 2 decimaler!

Vill lösa $\int_0^a 10xe^{-x}\,dx = 7$ → Pröva sig fram
→ Rita ut fnInt och använd intersect.

Efter 2,44 h

12. Sannolikheten för att komma fram till en viss myndighets telefonsupport efter x minuters väntan ges av täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}$$

a) Hur stor är sannolikheten att få prata med supporten inom 5 minuter? (0/2/0)

Sannolikheten ges av integralen av täthetsfunktionen

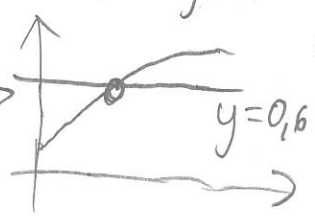
$$\int_0^5 \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}\,dx = [\text{fn Int}] = 0,565 \rightarrow 56,5\%$$

b) Hur många minuter har det gått innan 60 % har kommit fram till supporten? (0/2/0)

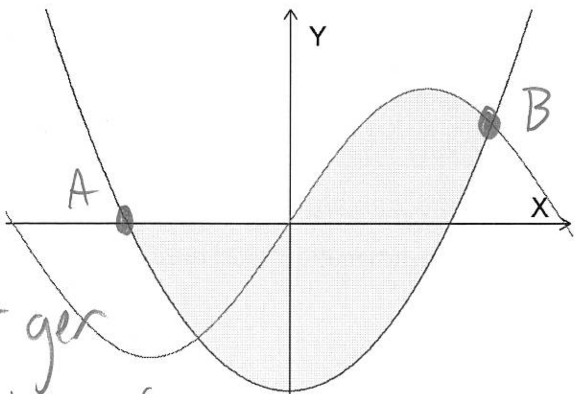
Önskar lösa $\int_0^a \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}\,dx = 0,6$

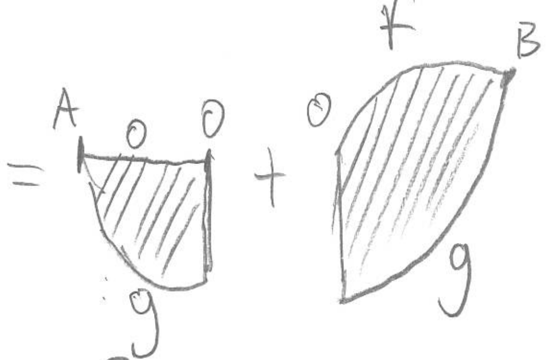
Rita grafen till fnInt och $y=0,6$

Intersect ger $5,49\cancel{8} \Rightarrow \boxed{5,5 \text{ min}}$



13. Figuren nedan visar graferna till $f(x) = 1{,}2\sin(1{,}5x)$ och $g(x) = x^2 - 1{,}5$, och ett markerat område.
Bestäm arean av detta område. (1/2/0)
Svara med 3 decimaler!





Intersect ger
A: $x \approx -1,224$
B: $x \approx 1,543$

$$= \int_A^0 (0-g)\,dx + \int_0^B (f-g)\,dx$$

$$= 1,2247 + 2,4315 = \boxed{3,656 \text{ ae}}$$

14. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/3/0)

Om man vill beräkna längden L av en kurva $y = f(x)$ mellan två punkter vars x-koordinater är a och b kan man använda formeln

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

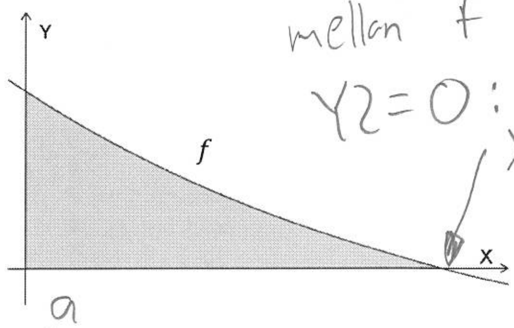
Beräkna längden av kurvan $y = \left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ i intervallet $1 \le x \le 4$

$\int_1^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \text{fnInt}(\sqrt{1+\text{nDeriv}(Y_1,X,X)^2},X,1,4)$

≈ 7 le

15. Figuren till höger visar grafen till funktionen $f(x) = 0{,}6^x - 0{,}4$ och det område som begränsas av de positiva koordinataxlarna och grafen.

Bestäm volymen som fås då området roterar kring x-axeln.
Svara med 3 decimaler! (0/3/0)



intersect mellan f och Y2=0: X=1,794

Rotationsvolymen fås via $\int_0^a \pi \cdot f^2\,dx$ där övre gränsen a fås via intersect. ($a \approx 1{,}794$)

$V = \text{fnInt}(\pi Y_1^2, X, 0, A)$

$\approx 0{,}533$ ve

16. Enligt en studie gjord av en elev som gjorde ett gymnasiearbete om uttrar så är vikten hos populationen uttrar i Norrforsen normalfördelad med medelvärdet 9 kg och standardavvikelsen 0,7 kg.

Antalet uttrar uppskattades i området till 300 stycken.

Enligt försöket, hur många av dessa uttrar har en vikt mindre än 8 kg? (0/2/0)

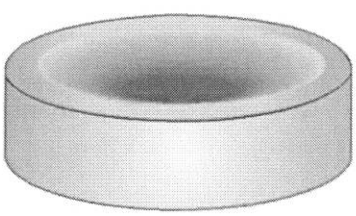
"Normalfördelning" => Normalcdf "Nöms"

Nedre = 0 (t.ex)
Övre = 8
Medel = 9
Standard avvikelsen = 0,7

Andelen = Normalcdf(0, 8, 9, 0.7) = 7,66%

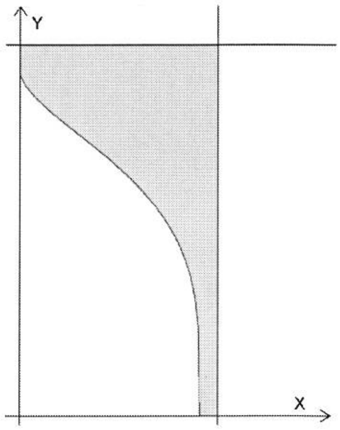
Antal uttrar = 7,66% av 300 = 23 st

17. En designer vill bygga en fontän av cement. Som grund används en rotationskropp.



Området som ska roteras visas nedan och det begränsas av funktionerna

$y = 2{,}3$
$x = 1{,}2$
samt den del av $\frac{y^4}{15} + \sqrt{x} = 1$ som ligger i första kvadranten



Hur mycket cement krävs för att bygga fontänen om alla mått anges i m? (0/1/3)

Volymen av "urgröpningen" ges av $\int_0^a \pi \cdot y^2\,dx$ där y ges genom att lösa ut y: $\frac{y^4}{15} + \sqrt{x} = 1 \Rightarrow y = \sqrt[4]{15\cdot(1-\sqrt{x})}$ och $a = 1$

Urgröpningsvolymen $= \int_0^1 \pi \cdot y^2\,dx = [\text{fnInt}] = 6{,}489\ \text{m}^3$

Volymen hos fontänen = 

− urgröpet = $\underline{13{,}453\ \text{m}^3}$

18. Bestäm värdet av $\int_0^{\pi/3} (2\sin(x) + 2) \cdot \cos(x)\,dx$ (0/0/2)

Svara exakt!

$\underline{\text{"Exakt"}} \Rightarrow$ Algebraisk lösning $\int_0^{\pi/3} (2\sin(x)+2)\cos(x)\,dx =$

$= [\text{göngra in } \cos(x) \text{ i } (\ )] = \int_0^{\pi/3} 2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)\,dx =$

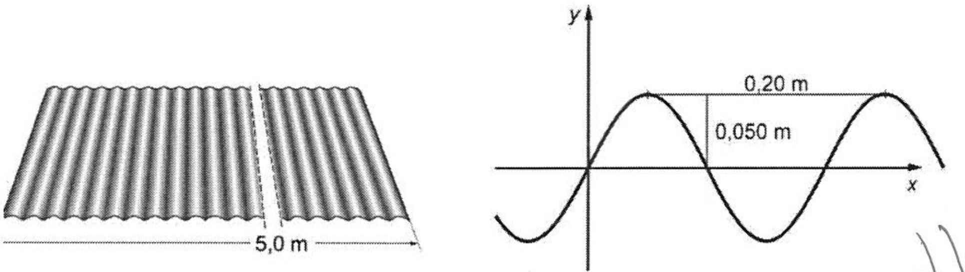
$= \left[\begin{matrix}\text{Dubbla vinkeln} \\ \text{för sin}\end{matrix}\right] = \int_0^{\pi/3} \sin(2x) + 2\cos(x)\,dx = \left[\text{Primitiv: } \frac{-\cos(2x)}{2} + 2\sin(x)\right]_0^{\pi/3} =$

$= \left(\frac{-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \left(\frac{-\cos(0)}{2} + \sin(0)\right) = \left[\begin{matrix}\text{Formelblad:} \\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(0) = 1\end{matrix}\right]$

$= \left(\frac{1}{4} + \sqrt{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + \frac{3}{4}$

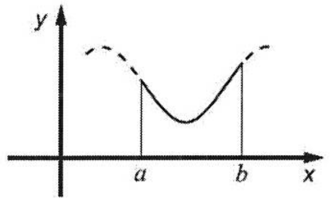
19. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/1/3)

En korrugerad plåt tillverkas genom att en plan plåt veckas. Sedd från sidan har den korrugerade plåten på bilden formen av en sinuskurva med perioden 0,20 m och amplituden 0,050 m.



Det finns en formel för beräkning av kurvlängd. Enligt denna gäller att längden s av en kurva $y = f(x)$ från $x = a$ till $x = b$ kan beräknas som:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$



Sinuskurva

$A = 0{,}050$

Period $= 0{,}20 \Rightarrow$

$k = \frac{2\pi}{0{,}20} = 10\pi$

Hur lång *plan* plåt ska man utgå ifrån för att den korrugerade plåtens längd ska bli 0,5 m?

Sinuskurvatänk ger $y = 0{,}05 \cdot \sin(10\pi x)$

Plan plåt = Kurvlängden hos den korrugerade $= \int_0^{0{,}5} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$

$= \text{fnInt}(\sqrt{1 + \text{NDeriv}(Y_1, X, X)^2}, X, 0, 0.5) \approx 0{,}73$ m

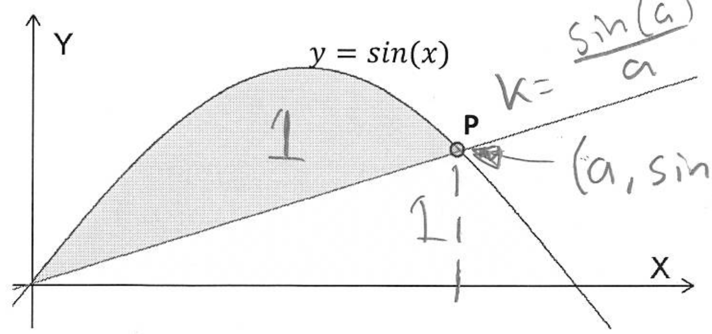
20. Grafen till funktionen $y = \sin(x)$ i intervallet $0 \leq x \leq \pi$ begränsar tillsammans med x-axeln ett område. = Arean $\int_0^{\pi} \sin(x)dx = 2$

Detta område kan delas i två lika stora delar med hjälp av en rät linje som går igenom origo.

Om = 2 måste

Linjen skär grafen i en punkt, **P**. Se figur.

= 1 och = 1



$k = \frac{\sin(a)}{a}$

$(a, \sin(a))$

Bestäm x-koordinaten hos **P**. *Svara med 2 decimaler!* (0/0/3)

$= 1 \Leftrightarrow \int_0^a \sin(x) - kx\, dx = \left[-\cos(x) - \frac{kx^2}{2}\right]_0^a = \left(-\cos(a) - \frac{k \cdot a^2}{2}\right) - (-1)$

$= \left[k = \frac{\sin(a)}{a}\right] = -\cos(a) - \frac{\frac{\sin(a)}{a} \cdot a^2}{2} + 1 = 1$

[Grafisk lösning]

$\Rightarrow a \approx 2{,}46$